

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи



Сагдатуллин Марат Камилевич

СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОСТЫХ И КОМБИНИРОВАННЫХ
ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МКЭ

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань - 2011

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

Научные руководители: доктор физико-математических наук,
профессор Голованов Александр Иванович
кандидат физико-математических наук,
доцент Бережной Дмитрий Валерьевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Паймушин Виталий Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор Чекмарев Дмитрий Тимофеевич

Ведущая организация: Казанский национальный исследовательский
технологический университет

Защита состоится 28 декабря 2011 г. в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного Совета Д 212.081.11 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета.

Отзывы на автореферат в одном экземпляре, заверенные печатью, просим высылать по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан «___» _____ 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент



Саченков А.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. При создании современных технических конструкций и строительных сооружений в качестве силовых элементов достаточно широко применяются тонкостенные подконструкции, состоящие из пластин и оболочек. Их применение позволяет существенно снизить материалоемкость всей конструкции с сохранением требуемых прочностных и жесткостных характеристик. При этом технологические условия эксплуатации требуют использование конструкций сложной геометрии. Данное обстоятельство приводит к необходимости наработки схем предварительного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных конструкций.

Следует отметить, что при расчете тонкостенных конструкций получение достоверных результатов сопряжено с определенными трудностями. Прежде всего, здесь возникает проблема выбора конечного элемента (КЭ), позволяющего получить не только достаточную точность при минимальной стоимости расчета, но и применяемого для широкого класса задач. Если для пластин имеется набор надежных КЭ, способных адекватно описывать механику их деформирования при любом нагружении, то для оболочек, в частности непологих, ситуация иная. В литературных источниках описано множество элементов, которые сравниваются между собой в тестовых расчетах, и оказывается, что каждый из них имеет ограниченную область применения. Это настораживает инженеров, ведущих практические расчеты реальных конструкций, поскольку для успешного выбора конкретного элемента из множества описанных в литературе, необходимо иметь опыт работы с ними и ясно представлять возможности каждого из элементов. Это требует высокой квалификации инженера и как механика, и как вычислителя. Вопрос построения физической модели конечного элемента, удовлетворяющего широкому кругу задач является в настоящее время открытым и весьма актуальным. В последнее время наибольшую актуальность получило исследование конечных элементов оболочек, построенных с учетом деформации поперечного сдвига и применяемые для расчета как оболочек средней толщины, так и тонких оболочек.

Целью диссертационной работы является разработка методики построения трехмерного конечного элемента сплошной среды, позволяющего моделировать комбинированные конструкции, состоящие из трехмерных тел и оболочек средней толщины при однослойной аппроксимации по толщине, как в линейной, так и в нелинейной постановках. Обычно КЭ оболочек средней толщины строятся с использованием степеней свободы, определенных в узлах срединной поверхности и включающих углы поворота нормального волокна. Как правило, КЭ с угловыми степенями свободы демонстрируют хорошую точность и эффективны в расчетах оболочек малой и средней толщин. Однако их использование весьма затруднительно при моделировании сопряжений оболочек с массивными трехмерными телами, так как

необходимо выражать узловые перемещения трехмерных элементов через углы поворота оболочечных КЭ. Поэтому использование специальных элементов оболочек позволяет упростить процедуру стыковки элементов, моделирующих трехмерные и оболочечные подконструкции.

Научную новизну работы составляют следующие результаты:

- На основе использования новых аппроксимаций разработана методика построения трехмерного конечного элемента, позволяющего рассчитывать пластины и оболочки средней толщины;
- На основе соотношений нелинейной механики сплошных сред для предложенного КЭ реализована методика решения геометрически нелинейных задач трехмерных конструкций и оболочек средней толщины;
- На основе предложенного КЭ построено семейство КЭ, позволяющих рассчитывать комбинированные конструкции, состоящие из трехмерных тел, а также ортотропных и многослойных оболочек;
- Проведен расчет руля высоты нового легкомоторного самолета, представляющего собой сложную комбинированную конструкцию.

Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгим математическим обоснованием основных разделов исследований, использованием для расчетов строгих математических методов, сходимостью решений, полученных на основе предложенной методики, тщательным тестированием на всех этапах разработки и реализации численных алгоритмов, многочисленными сравнениями с известными аналитическими и численными решениями. При расчете новой конструкции проведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными, которое показывает эффективность предложенной методики расчета.

Практическую ценность составляют представленная в диссертационной работе методика расчета тонкостенных элементов конструкций, алгоритмы построения аппроксимирующих функций. Предложенные в диссертации расчетные алгоритмы для решения задач, как пластин, так и непологих оболочек сложной геометрии, а также полученные результаты могут быть использованы как в учебных, так и в научных целях проектными организациями для инженерных расчетов в области авиастроения, судостроения, машиностроения и т.д.

Основные положения, выносимые на защиту.

- на основе трехмерных соотношений теории упругости предложен и реализован алгоритм построения модифицированного конечного элемента, моделирующего поведение тонкостенных конструкций;
- предложен и реализован алгоритм расчета тонкостенных конструкций с учетом геометрической нелинейности в рамках метода последовательных нагружений;
- реализована методика расчета комбинированных конструкций переменной толщины, состоящих как из трехмерных тел, так и слоистых ортотропных оболочек;

- на основе результатов решения многочисленных тестовых задач показана эффективность предложенных методик статического расчета пластин и оболочек как в линейной, так и в геометрически нелинейной постановках;
- получены результаты статического расчета руля высоты легкомоторного самолета, проведено сравнение с экспериментом.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались на конференциях Казанского (Приволжского) федерального университета «Лобачевские чтения» (г. Казань 2009-2011), на итоговых конференциях Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань 2009-2010), на XXIII Международной конференции. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов (г. Санкт Петербург 2009), на шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи (г. Самара 2009), на международной научно-технической конференции «Современные проблемы механики» (г. Ташкент 2009), на Международной научно – технической и образовательной конференции (г. Набережные Челны 2010), на второй международной конференции «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела» (г. Казань 2009), на седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи (г. Самара 2010), на восьмой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (г. Казань 2010), на XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2011) (г. Алушта 2011), на восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи (г. Самара 2011), на XXIV Международной конференции. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов (г. Санкт Петербург 2011).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 печатных работ, из них 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ для опубликования результатов кандидатских диссертаций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложения. Работа изложена на ____ страницах, содержит ____ рисунков, ____ таблиц. Библиография включает 203 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель и приведена научная новизна исследований, показана достоверность и практическая ценность полученных результатов, а также дан краткий обзор литературы.

В первой главе вводятся основные кинематические соотношения механики сплошной среды, и описывается технология построения трехмерного изопараметрического конечного элемента, способного моделировать НДС тонкостенных конструкций.

Вводится в рассмотрение радиус-вектор, определяющий геометрию поверхности в виде

$$\vec{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = X^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i. \quad (1)$$

Определяются базисные вектора и метрические тензора

$$\vec{R}_k = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^k} = R_k^i \vec{e}_i, \quad \vec{R}^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial X^i} \vec{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{G}} 0^{kmn} \vec{R}_m \wedge \vec{R}_n = R^{k,i} \vec{e}_i, \quad (2)$$

$$G_{ij} = \vec{R}_i \vec{R}_j = \mathbf{e} \sum_{m=1}^8 \frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} = \mathbf{e} \sum_{m=1}^8 R_i^m R_j^m, \quad G^{ij} = \vec{R}^i \vec{R}^j = \mathbf{e} \sum_{m=1}^8 \frac{\partial \xi^i}{\partial X^m} \frac{\partial \xi^j}{\partial X^m} = \mathbf{e} \sum_{m=1}^8 R^{i,m} R^{j,m}. \quad (3)$$

Рассматривая задачу линейной теории упругости, введем вектор перемещений и градиент вектора перемещений

$$\vec{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) - \vec{R}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \vec{U}(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad \vec{U}_i = \vec{e}_m \mathbf{e} \sum_{r=1}^8 U_r^m \frac{\partial N_r}{\partial \xi^i}. \quad (4)$$

Связь между вектором деформаций ε и вектором перемещений U в линейной теории упругости осуществляется в следующем виде

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{e} \sum_{r=1}^8 \mathbf{e} \sum_{m=1}^3 U_r^m E_{ij}^{rm}, \quad (5)$$

$$\text{где } E_{ij}^{rm} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \sum_{t=1}^8 X_t^m \left(\frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^j} + \frac{\partial N_t}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \right).$$

Теоретические исследования и опыт построения подобных конечных элементов свидетельствуют о «благоприятном» влиянии на точность результатов понижения аппроксимаций деформаций поперечного сдвига ε_{i3} . Опишем технику введения «понижения порядка аппроксимаций» для трехмерного конечного элемента.

Первая «редукция аппроксимации» состоит в исключении переменности этих деформаций по толщине. Получим

$$E_{13}^{rm} = \frac{1}{128} X_t^m \left(\xi_r^1 \xi_t^3 (1 + \xi_r^2 \xi_t^2) (1 + \xi_t^1 \xi_r^1) + (1 + \xi_t^2 \xi_r^2) + \xi_r^3 \xi_t^1 (1 + \xi_r^1 \xi_t^1) (1 + \xi_r^2 \xi_t^2) (1 + \xi_t^2 \xi_r^2) \right). \quad (6)$$

Вторая «редукция» направлена на исключение переменности вдоль координат ξ^1

$$E_{13}^{rm} = \frac{1}{128} X_t^m \left(1 + (\xi_r^2 + \xi_t^2) \xi^2 + \xi_r^2 \xi_t^2 (\xi^2)^2 + (\xi_r^1 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^1) \right). \quad (7)$$

Третья модификация предполагает определить деформации ε_{13} в виде линейной аппроксимации

$$E_{13}^{rm} = \frac{1}{128} X_t^m \left((1 + \xi_r^2 \xi_t^2) + (\xi_r^2 + \xi_t^2) \xi^2 + (\xi_r^1 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^1) \right), \quad (8)$$

по аналогии определим E_{23}^{rm}

$$E_{23}^{rm} = \frac{1}{128} X_t^m \left[(1 + \xi_r^1 \xi_t^1) + (\xi_r^1 + \xi_t^1) \xi^1 \right] \left(\xi_r^2 \xi_t^3 + \xi_r^3 \xi_t^2 \right). \quad (9)$$

Используем представление закона Гука для изотропного материала, учитывая, что в криволинейном базисе роль единичного тензора играет метрический тензор.

$$\sigma^{ij} = (2\mu G^{im} G^{jn} + \lambda G^{ij} G^{mn}) \varepsilon_{mn}. \quad (10)$$

Рассмотрим процедуру учета малости напряжений обжатия. Полученные, таким образом конечно-элементные модели утрачивают характер объемного поведения КЭ и соответствуют специальной теории оболочек.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda G_{ij} (G^{mn} \varepsilon_{mn} + 2G^{m3} \varepsilon_{m3} + G^{33} \varepsilon_{33}) = \\ &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda G_{ij} (\mu^* G^{mn} \varepsilon_{mn} + 2\mu^* G^{i3} \varepsilon_{i3}), \\ \sigma_{i3} &= 2\mu \varepsilon_{i3} + \lambda G_{i3} (\mu^* G^{mn} \varepsilon_{mn} + 2\mu^* G^{m3} \varepsilon_{m3}), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\mu^* = 1 - \frac{\lambda G_{33} G^{33}}{2\mu + \lambda G_{33} G^{33}}, \quad m, n = 1, 2. \quad (12)$$

Так как в качестве степеней свободы в рассматриваемом КЭ фигурируют узловые степени свободы на лицевых поверхностях, то фактически в кинематике учитываются возможные обжатия оболочки (изменение ее толщины). Следовательно, в расчетную схему необходимо ввести «упрощенный» закон упругости, связывающий напряжение обжатия σ_{33} с деформацией обжатия ε_{33} . Для этого введем следующее соотношение

$$\sigma_{33} = E^* \varepsilon_{33}, \quad (13)$$

где E^* - модуль жесткости на обжатие (в общем случае, он может быть определен из экспериментальных данных). В частности, можно принять

$$E^* = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (14)$$

Запишем в общем виде соотношения упругости

$$\sigma_{ij} = \underset{m,n=1}{\overset{3}{e}} D_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \quad i, j = 1, 3 \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 2\mu \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \lambda G_{\alpha\beta} \mu^* G^{\gamma\delta}, \\ D_{\alpha\beta\gamma 3} &= D_{\alpha\beta 3\gamma} = \lambda G_{\alpha\beta} \mu^* G^{\gamma 3}, \quad D_{\alpha 3\gamma\delta} = D_{3\alpha\gamma\delta} = \lambda G_{\alpha 3} \mu^* G^{\gamma\delta}, \\ D_{\alpha 3\gamma 3} &= D_{3\alpha\gamma 3} = D_{\alpha 33\gamma} = D_{3\alpha 3\gamma} = 2\mu \delta_{\alpha\gamma} + \lambda G_{\alpha 3} \mu^* G^{\gamma 3}, \\ D_{33\gamma\delta} &= D_{\gamma\delta 33} = D_{\gamma 333} = D_{33\gamma 3} = 0, \quad D_{3333} = E^*, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$.

Примем в качестве базового соотношения вариационное уравнение принципа виртуальных работ для однородного и изотропного материала

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \vec{f} \delta \vec{U} dV + \int_{S^\sigma} \vec{t}_n \delta \vec{U} dS, \quad (17)$$

где V - физический объем, ограниченный поверхностью $S = S^u \cup S^\sigma$, $S^u \cap S^\sigma = \emptyset$, \vec{f} - вектор заданных внешних объемных сил, \vec{t}_n - вектор заданных напряжений на части поверхности S^σ , на которой определены силовые граничные условия. Кинематические условия на части поверхности S^u выполняются за счет специальным образом определенных аппроксимаций.

Интеграл в левой части уравнения виртуальных работ заменяется конечной суммой, то есть

$$\int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{G} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 = \int_f \sigma^{mn} \delta \varepsilon_{mn} \sqrt{G}. \quad (18)$$

Рассмотрим один из вариантов свертки в подынтегральном выражении левой части уравнения виртуальных работ

$$\delta W = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \left(2\mu G^{im} G^{jn} + \lambda G^{ij} G^{mn} \right) \varepsilon_{mn} \delta \varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \sum_{r,s=1}^8 U_r^k D_{kl}^{rs} \delta U_s^l, \quad (19)$$

где $D_{kl}^{rs} = \left(2\mu G^{im} G^{jn} + \lambda G^{ij} G^{mn} \right) E_{ij}^{rm} E_{mn}^{sl} \sqrt{G}$.

Суммируя значения величин D_{kl}^{rs} , вычисленных в системе квадратурных точек, получаем блоки соответствующей модифицированной матрицы жесткости трехмерного восьми узлового КЭ линейной задачи теории упругости. Зная компоненты матрицы жесткости всех конечных элементов тонкостенной конструкции и решив систему линейных алгебраических уравнений, можно определить компоненты перемещений, следовательно, и деформированное состояние всей конструкции.

Рассмотрены несколько тестовых примеров для апробации методики и приводятся сравнения с аналитическими решениями задач

Задача 1. Деформирование пластины под действием равномерного давления $q \in \Gamma 1 \text{ см/}^2$ и сосредоточенной силы $F \in \Gamma 2000$. Пластина – квадратная со стороной $a \in \Gamma 100$ и толщиной $h \in \Gamma 1$, со следующими механическими свойствами: модуль Юнга $E \in \Gamma 2 \cdot 10^6 / \text{см}^2$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Пластина имеет жесткое защемление по всем боковым граням. В силу симметрии была рассмотрена четверть пластины, использовались различные конечно – элементные сетки. Результаты решения данной задачи приведены в таблице 1, где W_T - максимальный прогиб пластины, полученный из приближенного решения.

Таблица 1

	W_T	Сетка 2x2 $W_{\text{класс}}$	Сетка 2x2 $W_{\text{мод}}$	Сетка 3x3 $W_{\text{класс}}$	Сетка 3x3 $W_{\text{мод}}$	Сетка 4x4 $W_{\text{класс}}$	Сетка 4x4 $W_{\text{мод}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{класс}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{мод}}$
q	0,68796	0,0046	0,6618	0,0079	0,6751	0,01669	0,6834	0,0254	0,68631
F	0,61152	0,0042	0,5297	0,009	0,5743	0,0154	0,5909	0,0233	0,5987

Задача 2. Деформирование под действием собственного веса цилиндрической панели, шарнирно-опертой по криволинейным границам и свободными прямолинейными гранями со следующими параметрами (рис. 1).

$$L \approx 524 \text{ см},$$

$$R \approx 762 \text{ см},$$

$$h \approx 7.62 \text{ см},$$

$$E \approx 2.1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\mu = 0,$$

$$\gamma \approx 0.044 \text{ кг/см}^3.$$

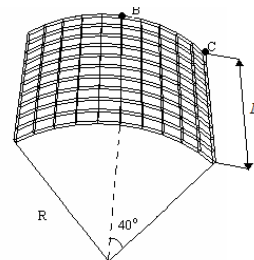


Рис. 1.

Скорость сходимости решения данной задачи, полученного настоящим конечным элементом, в сравнениях с аналитическим решением и решением обычным «классическим» трехмерным изопараметрическим восьми узловым элементом представлена в таблице 2, где W_T - максимальный прогиб цилиндрической панели.

Таблица 2

W_T	Сетка 4x4 $W_{\text{класс}}$	Сетка 4x4 $W_{\text{мод}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{класс}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{мод}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{класс}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{мод}}$	Сетка 13x13 $W_{\text{класс}}$	Сетка 13x13 $W_{\text{мод}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{класс}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{мод}}$
9,15	0,5758	8,5715	0,7215	8,6834	1,4159	8,9584	1,8847	9,0108	3,0776	9,0595

Задача 3. Рассматривается полусферическая оболочка с вырезом в полюсе (угол раствора 18°) под воздействием самоуравновешенной системы сил (рис. 2).

$$R \approx 10.0 \text{ см},$$

$$h \approx 0.04 \text{ см},$$

$$E = 6.825 \cdot 10^7 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$\mu = 0.3,$$

$$P \approx 1.0 \text{ кг/см}^2.$$

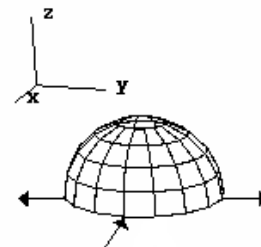


Рис. 2.

При решении используются модифицированные трехмерные изопараметрические конечные элементы. Результаты решения приведены в таблице 3.

Таблица 3

W_T	Сетка 5x5 $W_{\text{класс}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{мод}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{класс}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{мод}}$	Сетка 13x13 $W_{\text{класс}}$	Сетка 13x13 $W_{\text{мод}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{класс}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{мод}}$
0.093	0.0001	0.0292	0.0004	0.0895	0.0007	0.0925	0.0015	0.0931

Задача 4. Одной из самых распространенных задач является задача об изгибе замкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными торцами под действием самоуравновешенной системы двух сосредоточенных сил (рис. 3). Особенностью этой задачи является близость напряженного состояния к чистому изгибу, что представляет определенные трудности при

использовании МКЭ. Наиболее обширные численные данные накоплены для оболочки со следующими параметрами:

$$L \approx 26.2$$

$$R \approx 2.5$$

$$h \approx 0.238$$

$$E = 7.4 \cdot 10^5 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}$$

$$\mu = 0.3125$$

$$P \approx 45.3$$

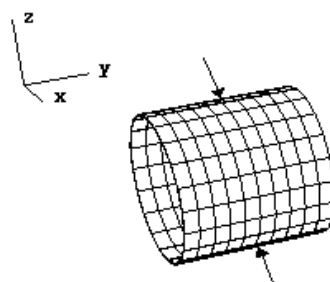


Рис. 3.

В силу наличия трех плоскостей симметрии была рассмотрена восьмая часть цилиндрической оболочки. Результаты решения данной задачи на различных конечно – элементных сетках приведены в таблице 4.

Таблица 4

W_T	Сетка 5x5 $W_{\text{класс}}$	Сетка 5x5 $W_{\text{мод}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{класс}}$	Сетка 10x10 $W_{\text{мод}}$	Сетка 15x15 $W_{\text{класс}}$	Сетка 15x15 $W_{\text{мод}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{класс}}$	Сетка 20x20 $W_{\text{мод}}$
0.275	0.0038	0.2	0.0132	0.2773	0.0267	0.2826	0.0427	0.2842

Предложенная в настоящей главе модифицированная методика построения трехмерного восьмиузлового изопараметрического конечного элемента теории упругости позволяет получить специальный КЭ, при помощи которого вполне реально рассчитывать НДС оболочек средней толщины сложной геометрии с использованием однослойной аппроксимации по толщине.

Вторая глава посвящена исследованию конечных деформаций оболочек средней толщины в криволинейной Лагранжевой системе координат. Реализована методика конечно-элементного геометрически нелинейного расчета тонкостенных конструкций для модели гиперупругого материала Сетха. Рассмотрены числовые примеры.

Расчет тонкостенных конструкций с учетом нелинейностей основывается на шаговых и итерационных методах. Выбор метода и алгоритма, реализующего его, зависит от типа нелинейности. В настоящей работе используется метод последовательных нагружений, который может быть естественно реализован в рамках МКЭ. Процесс деформирования представим в виде последовательности равновесных состояний $V_1, \dots, V_k, V_{k+1}, \dots, V_N$, где V_1 и V_N – области, занимаемые оболочкой в начальном и конечном деформированном состоянии, а V_k – произвольное промежуточное состояние. Действующая нагрузка достигается последовательным догружением на каждом шаге, причем количество шагов выбирается так, чтобы на каждом из них задача была квазилинейной. При такой постановке задача сводится к отысканию $(k+1)$ – состояния при уже определенной геометрии и с накопленными напряжениями k – го состояния.

Текущую конфигурацию на k –м шаге нагружения определим в аналогичном виде.

Если ввести в рассмотрение ковариантные компоненты метрических тензоров, то тензор деформации Альманси записывается следующим образом

$${}^k Z_{ij} = \frac{1}{2} ({}^k g_{ij} - G_{ij}). \quad (20)$$

Введем в рассмотрение вектор приращения перемещений

$$\Delta {}^k \vec{U} = {}^{k+1} \vec{r} - {}^k \vec{r} = \Delta U^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \vec{e}_i. \quad (21)$$

Аналог тензора пространственного градиента скорости будет представлен в виде

$$(\Delta {}^k h_R) = \frac{\partial \Delta {}^k \vec{U}}{\partial \xi^i} {}^k \vec{r}^i = \mathbf{e}_m \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^j} ({}^k \vec{r}^i {}^k r^j) = \Delta {}^k \alpha_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k r^j). \quad (22)$$

Симметричная часть этого тензора имеет вид

$$(\Delta {}^k d_R) = \frac{1}{2} \mathbf{e}_m \left(\frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^j} \right) ({}^k \vec{r}^i {}^k r^j) = \Delta {}^k Z_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k r^j). \quad (23)$$

Аналогичным образом можем записать и вариации.

Запишем известное вариационное уравнение в скоростях напряжений без учета массовых сил, предварительно сделав переход от $({}^k \sigma)$ и ${}^k \dot{t}_n^*$ к приращениям $(\Delta {}^k \sigma)$ и $\Delta {}^k \vec{t}_n^*$, приняв приращение времени $\Delta t = 1$

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \mathbf{H}^M (\Delta {}^k \sigma) \mathbf{C} (\delta {}^k d_R) + \frac{\partial \Delta {}^k U^i}{\partial x^i} \mathbf{C} ({}^k \sigma) \mathbf{C} (\delta {}^k d_R) - \frac{1}{2} ({}^k \sigma) \mathbf{C} (\delta {}^k h_R) \mathbf{C} ({}^k h_R) + ({}^k h_R)^T \mathbf{C} (\delta {}^k h_R)^T \mathbf{C} dV_k = \\ & = \int_{S_k^\sigma} \Delta {}^k \vec{t}_n^* \mathbf{C} \delta \vec{U} dS_k - \int_{V_k} \mathbf{H}^M ({}^k \sigma) \mathbf{C} (\delta {}^k d_R) \mathbf{C} dV_k - \int_{S_k^\sigma} {}^k \vec{t}_n^* \delta \vec{U} dS_k. \end{aligned} \quad (24)$$

В качестве физической модели используем материал Сетха, для которого справедлив закон Гука для тензора деформаций Альманси и распишем для приращения напряжений k – го состояния.

$$(\Delta {}^k \sigma) = 2\mu (\Delta {}^k A) + \lambda ({}^k g) \mathbf{H} ({}^k g) \mathbf{C} (\Delta {}^k A) \mathbf{C}, \quad (25)$$

где $(\Delta {}^k A) = (\Delta {}^k d_R) - (\Delta {}^k h_R)^T \mathbf{C} ({}^k A) - ({}^k A) \mathbf{C} (\Delta {}^k h_R)$.

Матрицы геометрической жесткости второго и третьего слагаемых соответственно запишутся в следующем дискретном виде

$$\tilde{D}_{ps}^{qr} = {}^k \sigma_{im} {}^k A_{ll}^{qp} {}^k E_{nj}^{rs} {}^k g^{mn} {}^k g^{ij} \sqrt{{}^k g}, \quad (26)$$

$$\tilde{D}_{ps}^{qr} = -\frac{1}{2} {}^k \sigma^{ij} \mathbf{H}^k A_{mi}^{rs} A_{jn}^{qp} {}^k g^{mn} + {}^k A_{im}^{qp} {}^k A_{nj}^{rs} {}^k g^{nm} \mathbf{H}^k \sqrt{{}^k g}. \quad (27)$$

В результате описанной выше конечно – элементной дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\mathbf{H}^l K \mathbf{H}^l (\Delta {}^l u) = \{ \Delta {}^l P \} - \{ {}^l H \}, \quad (28)$$

$\{ \Delta {}^l u \}$ – вектор приращения узловых перемещений,

$\mathbf{H}^l K \mathbf{H}^l$ – матрица левых частей,

$\{\Delta {}^l P\}$ – вектор приращения узловых сил,

$\{{}^l H\}$ – вектор невязки.

Решая систему линейных алгебраических уравнений и определяя приращения перемещений, находим $(l+1)$ конфигурацию и напряжения

$${}^{l+1}x^i = {}^l x^i + \Delta {}^l u^i, \quad {}^{k+1}\sigma = {}^k \sigma + \Delta {}^k \sigma. \quad (29)$$

В качестве верификации конечно-элементной методики решено несколько тестовых задач.

Задача 5. Рассматривается тестовая задача изгиба полосы в кольцо. Исходя из кинематических соотношений, вычислим σ_{11}^{\min} и σ_{11}^{\max} в узлах на свободном краю полосы с учетом $\frac{\pi h}{4L} = 1$

$$\sigma_{11}^{\min} = -\frac{\pi h}{2L}(\lambda + 2\mu); \quad \sigma_{11}^{\max} = \frac{\pi h}{2L}(\lambda + 2\mu). \quad (30)$$

Задача рассчитана с использованием предложенной выше методики. Длина полосы $L \approx 200$, толщина $h \approx 1$, ширина $b \approx 5$, модуль упругости $E = 20000 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$. На рис. 4 изображено деформированное состояние полосы и несколько промежуточных этапов нагружения.

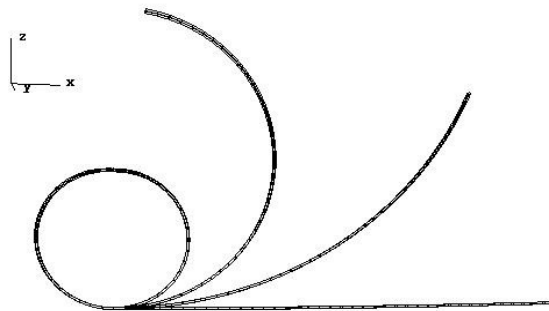


Рис. 4.

В случае, когда прилагаемая нагрузка разбивается на 1000 шагов нагружения, погрешность численного решения не более 1%. Погрешность могла появиться за счет конечно – элементной аппроксимации исследуемой области.

Задача 6. Рассматривается сферическая оболочка отверстием под воздействием самоуравновешенной системы сил $F \approx 10^4$ и механическими характеристиками задачи 3. Ниже приведен график максимальных перемещений U_{\max} (см) и V_{\max} (см) на каждом шаге нагружения при сетке 20×20 в сравнении с решениями других авторов. Изображено деформированное состояние сферической оболочки при $\lambda = 16$ (рис. 5).

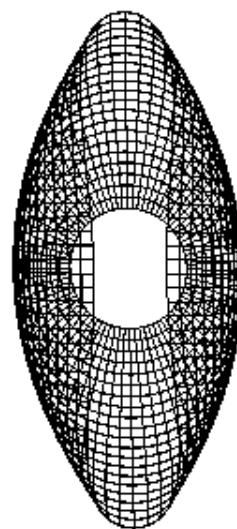
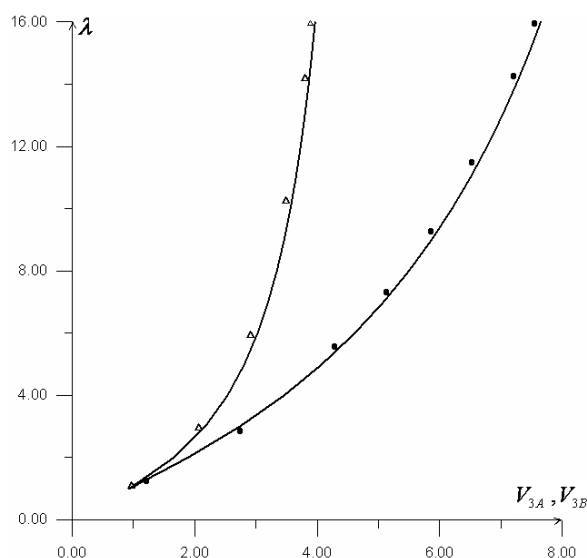


Рис. 5.

Задача 7. Рассматривается растяжение цилиндрической оболочки, путем приложения сосредоточенных сил (рис. 6).

$$R \approx 4.953 \quad ,$$

$$h \approx 0.094 \quad ,$$

$$L \approx 0.35 \quad ,$$

$$E = 10.5 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2} ,$$

$$\mu = 0.3125$$

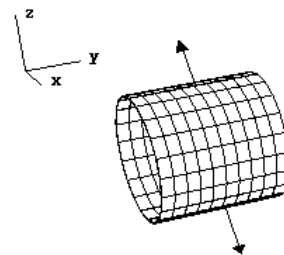


Рис. 6.

Максимальное радиальное перемещение получено из аналитического соотношения $W_{\max} = \frac{3}{8} \frac{\pi}{2} - 1 \frac{1}{4} R \approx 2.82715$. Ниже представлены радиальные перемещения на каждом шаге нагружения. Деформированное состояние цилиндрической оболочки при $P \approx 1000$ представлено на рис. 7.

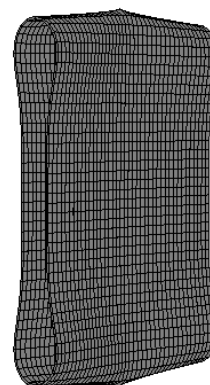
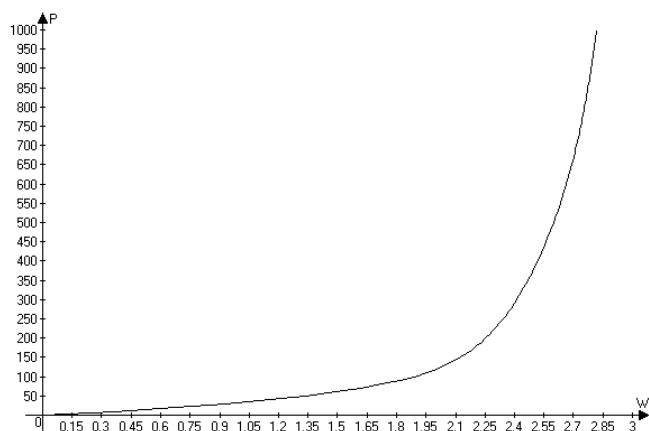


Рис. 7.

В третьей главе изложена технология построения многослойного конечного элемента оболочек средней толщины с ортотропными слоями. Приведена тестовая задача для апробации данного алгоритма и решена реальная задача расчета НДС руля высоты легкомоторного самолета.

Кинематические соотношения и аппроксимации геометрии представлены в главе 1. Обобщенный закон Гука запишем в виде (15).

С учетом гипотезы малости напряжений обжатия получим

$$\sigma_{ij}^* = D_{ijmn}^* \varepsilon_{mn} = \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} D_{ijmn} - \frac{D_{ij33} D_{33mn}}{D_{3333}} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}} \varepsilon_{mn}. \quad (31)$$

Записанная в таком виде гипотеза малости напряжений обжатия позволяет в явном виде ввести в расчетную схему физические постоянные, как для изотропного, так и для ортотропного тела.

Компоненты матрицы упругости для ортотропного материала запишутся в следующем виде

$$\begin{aligned} D_{1111} &= \frac{1}{AE_2} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{1}{E_3} - \frac{\mu_{23}^2}{E_2} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, & D_{2222} &= \frac{1}{AE_3} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{1}{E_1} - \frac{\mu_{31}^2}{E_3} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, \\ D_{3333} &= \frac{1}{AE_1} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{1}{E_2} - \frac{\mu_{12}^2}{E_1} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, & D_{1122} = D_{2211} &= \frac{1}{AE_3} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{\mu_{31} \mu_{23}}{E_2} + \frac{\mu_{12}}{E_1} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, \\ D_{1133} = D_{3311} &= \frac{1}{AE_2} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{\mu_{12} \mu_{23}}{E_1} + \frac{\mu_{31}}{E_3} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, & D_{2233} = D_{3322} &= \frac{1}{AE_1} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} \frac{\mu_{12} \mu_{31}}{E_3} + \frac{\mu_{23}}{E_2} \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}, \\ D_{1212} &= G_{12}, D_{2323} = G_{23}, D_{3131} = G_{31}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{E_1 E_2 E_3} \sum_{\substack{\text{ж} \\ \text{и}}} 1 - 2 \mu_{12} \mu_{23} \mu_{31} - \frac{E_1}{E_3} \mu_{31}^2 - \frac{E_2}{E_1} \mu_{12}^2 - \frac{E_3}{E_2} \mu_{23}^2 \sum_{\substack{\text{ч} \\ \text{ш}}}.$$

Наиболее часто в практике расчетов многослойных конструкций встречается преобразование коэффициентов матрицы упругости ортотропного тела при повороте системы координат вокруг своей оси Oe_3' (которая совпадает с нормалью к плоскости слоя) на угол φ . Преобразование коэффициентов упругости осуществляется следующим образом $D^{**} = \beta^T D^* \beta$.

Так как на практике большинство материалов имеют слоистую структуру с различными по толщине механическими характеристиками, в общем случае не симметричными, то целесообразнее применять многослойный конечный элемент. Значения толщин каждого слоя h_k удобнее задавать в виде их относительных значений

$$\Delta_k = \frac{h_k}{h}, h = \mathbf{e}_{k=1}^N h_k, \mathbf{e}_{k=1}^N \Delta_k = 1, \quad (33)$$

где N – количество слоев.

Межслойные координаты по толщине внутри КЭ можно определить следующим образом

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -1, \zeta_2 = -1 + 2\Delta_1, \zeta_3 = -1 + 2\Delta_1 + 2\Delta_2, \\ \dots, \zeta_k &= -1 + 2\mathbf{e}_{k=1}^{n-1} \Delta_k, \dots, \zeta_{N+1} = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

При вычислении матрицы жесткости применяется квадратурная формула Гаусса-Лежандра порядка $2l \approx 2l \approx N$, где N – количество слоев. Таким образом, координаты квадратурных точек в направлении оси ζ определяются в середине толщины каждого слоя $\zeta_k^* = \frac{1}{2}(\zeta_k + \zeta_{k+1})$. Тогда

компоненты матрицы жесткости можно вычислить следующим образом

$$D_{ab}^{rc} = G^{oi} G^{pj} D_{ijmn}^{**} E_{mn}^{ra} E_{op}^{cb} \sqrt{G} 2\Delta_k, \quad (35)$$

где $r, c = 1, 8, a, b, i, j, m, n, o, p = 1, 3$.

Компоненты напряжений вычисляются в четырех квадратурных точках, определенных в середине каждого слоя и далее экстраполируются в узлы.

Далее приведены результаты решения одной из тестовых задач.

Задача 8. Для определения границ применимости описанной выше модели относительно геометрических размеров и различий жесткостных характеристик слоев, с учетом ортотропной структуры материала проводилось сравнение конечно – элементного решения задачи изгиба трехслойной квадратной шарнирно – опертой пластины под синусоидальной нагрузкой (рис. 8). С учетом симметрии рассматривалась четверть пластины. Рассматривалось два варианта укладки слоев: первый – трехслойная с углами $\psi = 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ и толщинами $\frac{h}{4}, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$; вторая – девятислойная с углами

$\psi = 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ и толщинами $\frac{h}{10}, \frac{h}{8}, \frac{h}{10}, \frac{h}{8}, \frac{h}{10}, \frac{h}{8}, \frac{h}{10}, \frac{h}{8}, \frac{h}{10}$.

Верификация проводилась с другими приближенными решениями авторов.

$$E_1 = E_{МПЛ} 2 \cdot 10^3,$$

$$E_2 = E_{МКЛ} 9 \cdot 10^3,$$

$$G_{23} = G_{МПЛ} 3.38 \cdot 10^3,$$

$$G_{12} = G_{МПЛ} 2.45 \cdot 10^3,$$

$$\mu_{12} = \mu_{23} = \mu_{31} = 0.01,$$

$$q_1 = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

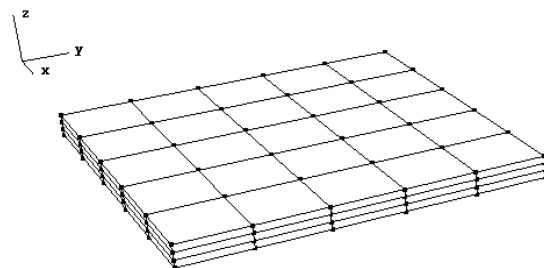


Рис. 8.

В табл. 5 для трехслойного пакета и в табл. 6 – для девятислойного, представлены безразмерные величины

$$w^* = \frac{w Q}{q_0 h} \frac{h}{a} \frac{h}{a} \frac{h}{a}, \sigma^* = \frac{\sigma}{q_0} \frac{h}{a} \frac{h}{a}, \tau^* = \frac{\tau}{q_0} \frac{h}{a} \frac{h}{a}, \quad (36)$$

$$Q = \frac{\pi^4}{12} \frac{1}{k} 4G_{12} + \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (E_1 + (1 + 2\mu_{12}) E_2) \frac{h}{b},$$

где $q_0 = 1$ – интенсивность поперечной нагрузки, a – линейный размер пластины, h – толщина пластины.

Таблица 5

a/h	w^* $\frac{h}{a}, \frac{a}{h}, \frac{h}{a}$	σ_x^* $\frac{h}{a}, \frac{a}{h}, \frac{h}{a}$	τ_{xy}^* $0, 0, \frac{h}{a}$
100	1,06	0,482	0,0197
20	1,174	0,48	0,0191
10	1,565	0,47	0,02
4	4,117	0,42	0,026

Таблица 6

a/h	w^*	σ_x^*	τ_{xy}^*
100	1,00183	0,493	0,02
20	1,10338	0,49	0,019
10	1,5	0,5	0,02

Задача 9. Проведен расчет НДС руля высоты легкомоторного самолета. Руль высоты представляет собой сложную оболочечную конструкцию, усиленную нервюрами и лонжероном. С учетом наличия плоскости симметрии рассмотрена половина конструкции. Конечное-элементное разбиение всей конструкции восьмиузловыми элементами изображено на рис. 9.

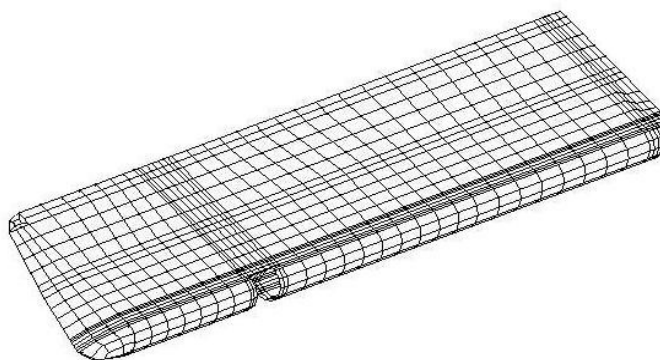


Рис. 9.

Данная конструкция состоит из четырех различных видов материалов (1 – ткань Т-10-14, 2 – ткань Э-100, 3 – пенопласт, 4 – фанера). Также данная конструкция состоит из 14 различных видов подконструкций, представляющих собой многослойные оболочки с различными упругими постоянными и углами намотки в каждом слое.

На рис. 10 показано наложение кинематических граничных условий на конструкцию.

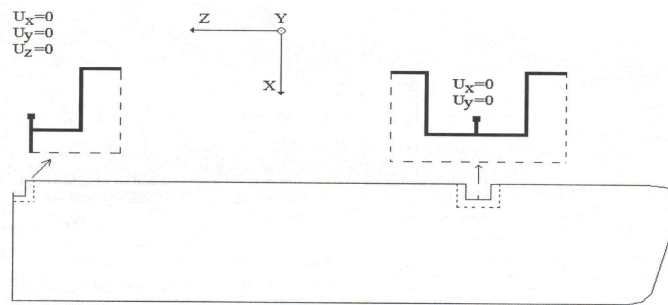


Рис. 10: Схема кинематического закрепления руля высоты.

Был проведен ряд расчетов для различных случаев силового нагружения. Для иллюстрации результатов одного из расчетов на рисунке 11 приведено распределение прогибов W (см) для случая равномерного нагружения по верхней внешней лицевой поверхности руля высоты интенсивностью $q=1500$ Па.

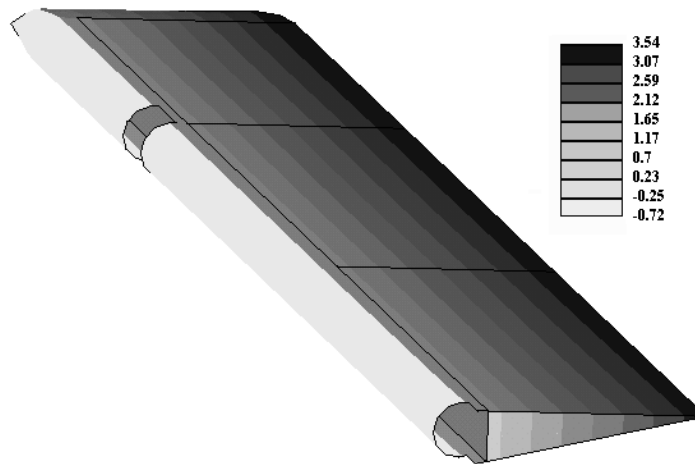


Рис. 11: Распределение прогибов.

По результатам экспериментальных данных $W_{max}^{эксп} = 3.39$.

Заключение.

1. На основе соотношений теории упругости, путем введения новых аппроксимаций, разработан модифицированный трехмерный изопараметрический восьмиузловой конечный элемент, позволяющий рассчитывать как трехмерные тела, так и оболочечные конструкции в широком диапазоне геометрических параметров.
2. Разработана и реализована конечно-элементная методика для решения геометрически нелинейных задач при расчете тонкостенных конструкций в рамках методики пошагового нагружения.
3. На основе предложенного конечного элемента построено семейство конечных элементов, позволяющих в рамках единой модели рассчитывать конструкции, состоящие как из трехмерных тел, так и из оболочек сложной геометрии, в том числе и многослойных.

4. Проведен статический расчет сложной комбинированной конструкции руля высоты легкомоторного самолета и определено его напряженно-деформированное состояние. Полученные численные результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

Публикации в рекомендованных ВАК изданиях:

1. Голованов А.И. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия физ. – мат. наук. – Казань 2009. – Т. 151, кн. 3, с. 121-129.
2. Голованов А.И. Нелинейная задача о гиперупругом деформировании полилинейного конечного элемента оболочки средней толщины / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – №4 (16). – С. 39 – 49.

Публикации в других изданиях:

3. Султанов Л.У. Алгоритмы исследования гиперупругих тел / Султанов Л.У., Сагдатуллин М.К. // Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи. – Самара 2009. – С. 260-262.
4. Голованов А.И. Трехмерный КЭ оболочки средней толщины / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // ВЕМ&FEM 2009, XXIII Международная конференция. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. – Санкт Петербург 2009. – Т. 1, с. 56-58.
5. Голованов А.И. Трехмерный КЭ оболочки средней толщины / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // ВЕМ&FEM 2009, XXIII Международная конференция. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. – Санкт Петербург 2009. – Т. 2, с. 116-121.
6. Голованов А.И. Трехмерный КЭ для расчета НДС тонкостенных конструкций / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского: Материалы Восьмой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2009»; Казань, 1-6 ноября 2009 г.; Казан. матем. об-во. 2009. – Т. 39. – С. 171 – 173.
7. Голованов А.И. Постановка задачи численного моделирования конечных гиперупругих деформаций МКЭ / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Прикладная математика и механика: сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 55 – 67.
8. Голованов А.И. Теоретические основы численного моделирования конечных гиперупругих деформаций МКЭ / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Труды международной научно – технической

- конференции «Современные проблемы механики». – Ташкент 2009. – С. 271 – 275.
9. Голованов А.И. Построение трехмерного КЭ оболочки в линейной постановке / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Образование и наука – производству. Сборник трудов Международной научно – технической и образовательной конференции. – Набережные Челны: Изд-во Камской госуд. Инж.- экон. акад., 2010. – книга 1, часть 1. – С. 25 – 27.
 10. Голованов А.И. Построение трехмерного КЭ для расчета НДС тонкостенных конструкций / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела. Труды Второй международной конференции. Казань, 8 – 11 декабря 2009 г. – С. 122-125.
 11. Голованов А.И. Расчет геометрически нелинейных оболочек средней толщины в базисе деформированного состояния на основе МКЭ / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения –2010»; Казань, 1-6 октября 2010 г.; Казан. Матем. об-во.- 2010. – Т.40, с. 85-88.
 12. Голованов А.И. Трехмерный конечный элемент оболочек средней толщины с учетом обжатия / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи. – Самара 2010. – С. 115-117.
 13. Голованов А.И. Трехмерный КЭ для расчета оболочек средней толщины / Голованов А.И., Сагдатуллин М.К. // Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 2. – Ч.: ГУП, «ИПК «Чувашия», 2010. – С. 34 – 35.
 14. Сагдатуллин М.К. Расчет тонкостенных конструкций МКЭ с учетом геометрической нелинейности / Сагдатуллин М.К., Голованов А.И. // Материалы восьмой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения». – Казань, 1 – 5 октября 2010 г. – С. 380 – 384.
 15. Сагдатуллин М.К. Расчет геометрически нелинейных оболочек средней толщины МКЭ / Сагдатуллин М.К., Голованов А.И. // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. – М.: ООО «ТР – принт», 2011. – С. 172 – 175.
 16. Сагдатуллин М.К. Моделирование геометрически нелинейного деформирования оболочек средней толщины / Сагдатуллин М.К., Саченков А.А. // Материалы XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2011), 25 – 31 мая 2011 г., Алушта. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 406-408.

17. Сагдатуллин М.К. Ортотропный многослойный КЭ оболочек средней толщины / Сагдатуллин М.К. // Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Математическое моделирование и краевые задачи. Часть 1. – Самара 2011. – С. 190-193.
18. Сагдатуллин М.К. Расчет НДС многослойных оболочек средней толщины / Сагдатуллин М.К., Бережной Д.В. // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения –2011»; Казань, 31 октября-4 ноября 2011 г.; Казан. Матем. об-во.- 2011. – Т.41, с. 249-252.
19. Сагдатуллин М.К. Определение НДС оболочек при конечных деформациях МКЭ / Сагдатуллин М.К., Бережной Д.В. // ВЕМ&FEM 2011, XXIV Международная конференция. Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. – Санкт Петербург 2011. – Т. 1, с. 97-98.